Ejercicios de Análisis Matemático

Continuidad y límite funcional

1. a) Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

   b) Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

   c) Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.

   d) Da un ejemplo de una función continua en $[0, 1[$ tal que $f([0, 1[)$ no sea acotado.

   e) Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

2. Prueba que si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en a entonces también lo es $|f|$. Da un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.

3. Representamos por $E(x)$ la parte entera de x. Haz un esquema de las gráficas de las siguientes funciones y estudia su continuidad.

   a) $f(x) = x - E(x)$

   b) $f(x) = E(1/x)$

4. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = E(x^2)$.

5. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

6. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

7. Estudia la continuidad de la función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(1) = 1/4$ y:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x \in [0, 1[\cup]1, 2] \\ E(x) - 7/4 & \text{si } x \in]2, 4] \end{cases}$$

8. Estudia la continuidad de la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

9. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo x en $[a, b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

10. Sea $a > 1$. Prueba que la ecuación $x + \mathrm{e}^{-x} = a$ tiene al menos una solución positiva y otra negativa.

11. Prueba que la ecuación $x + \mathrm{e}^x + \operatorname{arc\,tg} x = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

12. Prueba que hay un número real $x > 0$ tal que $\log x + \sqrt{x} = 0$.

13. Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que siempre hay dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

14. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) = f(b)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, prueba que hay algún punto $c \in [a, b - (b-a)/n]$ tal que $f(c) = f(c + (b-a)/n)$.

15. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demuestra que en algún momento de su carrera recorre 1 kilómetro en exactamente 5 minutos.

16. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuestra que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

17. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

18. Sean f, g funciones continuas que no se anulan en un intervalo I, verificando que $(f(x))^2 = (g(x))^2$ para todo $x \in I$. Prueba que o bien $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, o bien $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in I$. ¿Cuántas funciones hay $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y verificando que $(\varphi(x))^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$?.

19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Prueba que hay un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = a$.

20. Sea E un conjunto no vacío de números reales acotado.

    a) Describe el conjunto de todos los mayorantes de E.

    b) Describe el conjunto de todos los minorantes de E.

21. a) Prueba que $\sup(E) \in E$ si, y sólo si, E tiene máximo, en tal caso $\max(E) = \sup(E)$.

    b) Prueba que $\inf(E) \in E$ si, y sólo si, E tiene mínimo, en tal caso $\min(E) = \inf(E)$.

22. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Prueba que $\sup A \leqslant \inf B$.

23. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Justifica las siguientes afirmaciones:

    a) Si $A \subset B$ entonces $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ e $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.

    b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

24. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}; \quad AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

    Prueba que $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ y, supuesto que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$, prueba que $\sup(AB) = \sup A \ \sup B$.

25. Usando solamente la definición de intervalo, y las propiedades del supremo e ínfimo, describe todos los posibles tipos de intervalo.

26. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leqslant |x - y|$$

    Deduce que la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ es continua.

27. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a, b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Prueba que f es constante.

28. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a, b[$. Prueba que hay dos números u, v verificando que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u, v[$.

29. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ creciente. Supongamos que $a\leqslant f(x)\leqslant b$ para todo x en $[a,b]$. Prueba que hay algún punto $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$.

    Sugerencia. Considera el supremo del conjunto $\{x\in[a,b]: x\leqslant f(x)\}$. Fíjate que no suponemos que f sea continua.

30. Justifica que, dado $x\in\mathbb{R}$, la ecuación $\log t + t^5 = x$ tiene una única solución, que representamos por $\varphi(x)$. Justifica que la función $x\mapsto\varphi(x)$, $(x\in\mathbb{R})$, así definida es continua.

31. Prueba que la función $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ es biyectiva. Calcula f^{-1} y comprueba que es una función continua.

32. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua verificando que $|f(s)-f(t)|\geqslant|s-t|$ para todos $s,t\in[0,1]$, y $f(\{0,1\})=\{0,1\}$. Prueba que o bien es $f(x)=x$ para todo $x\in[0,1]$, o bien es $f(x)=1-x$ para todo $x\in[0,1]$.

33. Sean
$$A=\{x\in\mathbb{Q}: x\leqslant 0 \ \text{ o } \ x^2<2\},\quad B=\{x\in\mathbb{Q}: x>0 \ \text{ y } \ x^2\geqslant 2\}.$$
    Prueba que $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $\mathbb{Q}=A\cup B$ y $a<b$ para todos $a\in A$, $b\in B$. Además:

    a) Para cada $r\in A$ hay algún $s\in A$ tal que $r<s$.

    b) Para cada $u\in B$ hay algún $t\in B$ tal que $t<u$.

    c) No hay ningún $z\in\mathbb{Q}$ con la propiedad de que todo número racional menor que z esté en A y todo número racional mayor que z esté en B.

34. Sean
$$A=\{x\in\mathbb{R}: x\leqslant 0 \ \text{ o } \ x^2<2\},\quad B=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \ \text{ y } \ x^2\geqslant 2\}.$$
    Prueba que $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $\mathbb{R}=A\cup B$ y $a<b$ para todos $a\in A$ y $b\in B$. Sea $z\in\mathbb{R}$ el extremo superior de A. Prueba que $z^2=2$, $A=]-\infty,z[$, $B=[z,+\infty[$.

35. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Supongamos que para cada $x\in[a,b]$ hay algún $y\in[a,b]$ tal que $|f(y)|\leqslant\frac{2}{10}|f(x)|$. Prueba que f se anula en algún punto de $[a,b]$.

36. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Prueba que la función $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada para todo $x\in[a,b]$ por $g(x)=\max f([a,x])$, es continua.

37. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, pongamos $M=\max f([a,b])$, $m=\min f([a,b])$ y supongamos que $f(a)=f(b)$ y que $m<f(a)<M$. Prueba que f toma todo valor de $[f(a),M[\cup]m,f(a)]$ en al menos dos puntos de $[a,b]$.

38. Sea $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Prueba que
$$\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty \iff \lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=0 \tag{1}$$
    Particulariza este resultado para los casos en que f solamente toma valores positivos o negativos.

39. Sea $L\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Prueba que
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=L \iff \lim_{x\to+\infty} f(1/x)=L \tag{2}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=L \iff \lim_{x\to-\infty} f(1/x)=L \tag{3}$$

40. Sea $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ la función dada para $x \in]0,1[$ por:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}.$$

Prueba que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

41. Calcula la imagen de la función $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x\,(1-x^2)^{-1/2}, \forall x \in]-1,1[.$$

42. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(0)=0$. Justifica que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcula la imagen de f.

43. Sean $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{x} & , \text{ si } x < 0 \\ x & , \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & , \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y g en todo punto de $\mathbb{R}$ y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y en $-\infty$.

44. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(0)=0$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(1/x)$, para todo $x \neq 0$. Estudia la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

45. Sea $f:[0,1[\to\mathbb{R}$ una función continua. Definamos $g(x) = f(x - E(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función g, así definida, es continua si, y sólo si, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(0)$. Supuesto que esta condición se cumple, y que f no es constante, definamos $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $h(x) = g(1/x)$ si $x \neq 0$, y $h(0) = f(0)$. Justifica que h es continua y acotada en $\mathbb{R}^*$. Calcula la imagen por h de un intervalo de la forma $]0,r[$ donde $0 < r < 1$. Deduce que h no tiene límite por la izquierda ni por la derecha en 0 y que la imagen por h de todo intervalo es también un intervalo.

46. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0)=0$ y:

$$f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad (x > 0).$$

Estudia la continuidad de f según los valores de α.

47. Supongamos que $a < 0 < b$. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ dadas para todo $x \neq 0$ por :

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}, \qquad g(x) = x f(x).$$

48. Determina la imagen de la función $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ dada para todo $x \neq 0$ por $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\log|x|)$.

49. Sea $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ la función dada para todo $x \neq 1$ por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}.$$

Estudia la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f.

50. La ecuación $ax^2 + 2x - 1 = 0$ donde $a > -1$, $a \neq 0$ tiene dos soluciones que representaremos por $\lambda(a)$ y por $\mu(a)$. Calcula los límites de dichas funciones en $a = 0$ y en $a = -1$.

51. Estudia los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de:

a) Una función polinómica.

b) Una función racional.